ÁREAS Y VOLÚMENES I

Ejercicio nº 1.-

Halla el valor de m para que el área del paralelogramo determinado por $\vec{u}(2, 0, 1)$ y $\vec{v}(0, m, 1)$ sea 2.

Ejercicio nº 2.-

Dados los vectores $\vec{u}(1, 2, 3)$, $\vec{v}(1, 1, 1)$ y $\vec{w}(1, \lambda, 5)$, halla el valor de λ para que:

a) determinen un paralelepípedo de volumen 10.

b) sean linealmente dependientes.

Ejercicio nº 3.-

Dados los vectores $\vec{u}(1, 3, 0)$ y $\vec{v}(2, 1, 1)$:

a) Halla un vector, $\vec{w}$, de módulo 1, que sea perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.

b) ¿Cuál es el área del paralelogramo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$?

Ejercicio nº 4.-

a) Halla los valores de m para que los vectores $\vec{u}(0, 1, 1)$, $\vec{v}(-2, 0, 1)$ y $\vec{w}(m, m-1, 1)$ sean linealmente independientes.

b) Estudia si el vector $(2, 1, 0)$ depende linealmente de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ para el caso $m = 3$.

Ejercicio nº 5.-

Halla el área de un paralelogramo determinado por los vectores $\vec{u} \times \vec{v}$ y $\vec{u} \times \vec{w}$, siendo:

$\vec{u}(2, -1, 1)$, $\vec{v}(0, 1, -1)$ y $\vec{w}(1, 0, 1)$

Ejercicio nº 6.-

a) Demuestra que los vectores $\vec{u}(k, -3, 2)$, $\vec{v}(k, 3, 2)$ y $\vec{w}(1, 0, 0)$ son linealmente independientes, cualquiera que sea el valor de k.

b) ¿Cuál es el volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$?

SOLUCIONES

Solución nº 1:

- El área del paralelogramo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es igual a $|\vec{u}\times\vec{v}|$.
- Calculamos $\vec{u}\times\vec{v}$ y hallamos su módulo: $\vec{u}\times\vec{v} = (2,\ 0,\ 1)\times(0,\ m,\ 1) = (-m,\ -2,\ 2m)$

$|\vec{u}\times\vec{v}| = \sqrt{(-m)^2+(-2)^2+(2m)^2} = \sqrt{m^2+4+4m^2} = \sqrt{5m^2+4}$

- Igualamos a 2:

$\text{Área} = \sqrt{5m^2+4} = 2 \ \rightarrow\ 5m^2+4 = 4 \ \rightarrow\ 5m^2 = 0 \ \rightarrow\ m = 0$

Solución nº2:

a) El volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es igual al valor absoluto de su producto mixto:

$$[\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 5 \end{vmatrix} = 2\lambda - 6$$

$$Volumen = |2\lambda - 6| = 10 \quad \begin{cases} 2\lambda - 6 = 10 \ \rightarrow\ 2\lambda = 16 \ \rightarrow\ \lambda = 8 \\ 2\lambda - 6 = -10 \ \rightarrow\ 2\lambda = -4 \ \rightarrow\ \lambda = -2 \end{cases} \quad \text{Hay dos soluciones}: \ \lambda_1 = 8,\ \ \lambda_2 = -2$$

b) Su producto mixto ha de ser cero: $[\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}] = 2\lambda - 6 = 0 \ \rightarrow\ \lambda = 3$

Solución nº 3:

a) Un vector perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$ es: $\vec{u}\times\vec{v} = (1,3,0)\times(2,1,1) = (3,-1,-5)$

Dividimos por su módulo para conseguir que tenga módulo 1:

$$\vec{w} = \frac{\vec{u}\times\vec{v}}{|\vec{u}\times\vec{v}|} = \left(\frac{3}{\sqrt{35}},\ \frac{-1}{\sqrt{35}},\ \frac{-5}{\sqrt{35}}\right) \quad \text{Hay dos soluciones:} \ \left(\frac{3}{\sqrt{35}},\ \frac{-1}{\sqrt{35}},\ \frac{-5}{\sqrt{35}}\right) \ \text{y} \ \left(\frac{-3}{\sqrt{35}},\ \frac{1}{\sqrt{35}},\ \frac{5}{\sqrt{35}}\right)$$

b) $\text{Área} = |\vec{u}\times\vec{v}| = \sqrt{35} \approx 5{,}92\ \text{u}^2$

Solución nº 4:

a) Para que sean linealmente independientes, su producto mixto debe ser distinto de cero:

$$[\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ m & m-1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - m = 0 \ \rightarrow\ m = 4 \quad \text{Ha de ser } m \neq 4.$$

b) Para $m = 3$, los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes, y forman una base de $\mathbf{R}^3$. Por tanto, cualquier vector de $\mathbf{R}^3$, en particular (2, 1, 0), depende linealmente de ellos.

Solución nº 5:

- Calculamos $\vec{u}\times\vec{v}$ y $\vec{u}\times\vec{w}$: $\vec{a} = \vec{u}\times\vec{v} = (0,2,2)$ $\quad \vec{b} = \vec{u}\times\vec{w} = (-1,-1,1)$
- El área del paralelogramo determinado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es igual al módulo de su producto vectorial:

$\vec{a}\times\vec{b} = (0,2,2)\times(-1,-1,1) = (4,-2,2)$

$\text{Área} = \sqrt{4^2+(-2)^2+2^2} = \sqrt{16+4+4} = \sqrt{24} \approx 4{,}90\ \text{u}^2$

Solución nº 6:

a) Tenemos que probar que su producto mixto es distinto de cero, sea cual sea el valor de k.

$$[\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}] = \begin{vmatrix} k & -3 & 2 \\ k & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \ \text{para todo } k.$$

b) El volumen es igual al valor absoluto de su producto mixto. Por tanto: $Volumen = 12\ \text{u}^3$